H. Gottschewski　『協和』
2010 年 1 月 22 日

Leonhard Euler: *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*（レオンハルト オイラー『調和のもっとも確実な原理に基づいて明白に展開された新しい音楽論の試み』), St. Petersburg 1739（つづき）

<u>gradus suavitatis（魅力度）</u>

gradus suavitatis（以下 g.s.）は文字通りの意味では「魅力さの段階」であるが、オイラーの論では「分かり易いものが魅力的」で、「単純な比率が分かり易い」となっているので、g.s.は「分かり易さの段階」、あるいは「比率の単純さの段階」と特徴づけることもできる。段階は 1, 2, 3...の自然数で数えるが 1 がもっとも魅力的、一番分かり易い、比率として一番単純であり、自然数が高くなれば魅力さ、分かり易さ、単純さが減少する。

<u>g.s.はまず自然数自体に当てはめられる</u>。（自然数 n が $n:1$ という比率も表すからである。）

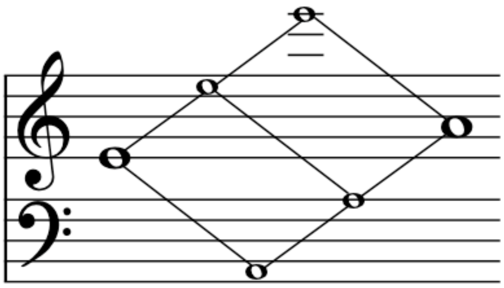
- １はもっとも分かり易い数字であるのは自明なので、１の g.s.は 1 である。
- ２は次に分かり易いのが自明で、２の g.s.は２である。
- ３は次の分かり易さの段階で、３の g.s.は３である。つまり１から３までの数は直接的にしか理解することが出来ないので、g.s.は数の大きさと同じものになる。
- ４という数を見ると、２から４へ進歩する事は１から２の進歩と同じ事なので、１から２への g.s.の差も２から４への差と同じでなければならない。すなわち２の g.s.は１の g.s.より一つ大きいので、４の g.s.も２の g.s.より一つ大きいことになる。つまり４の g.s.は３の g.s.と同じく３である。
- ５は素数なので直接の理解以外は不可能で、３のところの議論を受けて５の g.s.を５とする。同じく全ての素数 p についてその g.s.を p と設定する。
- ６という数を見ると、３から６へ進歩する事は１から２の進歩と同じ事なので、１から２への g.s.の差も３から６への差と同じでなければならない。また、２から６へ進歩する事は１から３の進歩と同じ事なので、１から３への g.s.の差も２から６への差と同じでなければならない。いずれの考え方に従っても、６の g.s.は４となる。
- ８を２×４としても４×２としても考えることができるが、いずれの場合にも８の g.s.は４になる。
- ９は３×３なので、１と３の g.s.の差が３と９の g.s.の差と同じで、９の g.s.は５となる。
- 10 の g.s.は２×５という考え方からも５×２という考え方からも６となる。
- 以上の考え方をまとめると自然数の g.s.を一般的にその自然数の素因数分解から求めることが出来、数学的な定義は以下の様になる。
  - １の g.s.は１
  - 素数 p の g.s.は p
  - $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ の g.s.は $p_1+(p_2-1)+\ldots+(p_k-1)$、つまり $p_1+p_2+\ldots+p_k-(k-1)$

音楽的には n という自然数がある基音と第 n 倍音の関係を示す。例えば第 12 倍音では譜例１のように３つの方法で基音から第 12 倍音まで３つのステップで進むことができる。つ

まり基音の第 12 倍音は「基音の第２の倍音の第２の倍音の第３の倍音」、または「基音の第２の倍音の第３の倍音の第２の倍音」、または「基音の第３の倍音の第２の倍音の第２の倍音」である。第２倍音への進歩では g.s. が１段上がり、第３倍音への進歩では２段あがるので、第 12 倍音までは全部で４段上がる。１からスタートするので基音と第 12 倍音の関係の g.s.が５である。

譜例１：第 12 倍音　２：第９倍音　３：第５倍音　４：第 16 倍音
いずれの例も gradus suavitatis は５である

２つの自然数の比率の gradus suavitatis
n と *m* が互いに素（即ち最大公約数が１）である場合、*n*：*m* という比率の g.s.が *n*×*m* の比率に等しい。なぜかといえば、例えば３：４の比率（純４度）では、素数の関係に相当する音程で一方から他方へ進もうと思った場合、上の第 12 倍音の例と同様に二回オクターヴと一回 12 度のステップが必要である。



n と *m* が互いに素でない場合、その関係を g.s.を計算する前に約さなければならない。

３つ以上の自然数による比率の gradus suavitatis
３つ以上の自然数の場合にはまずそれを（互いに素でない場合に）約し、その最小公倍数を計算する。この最小公倍数の g.s.は比率の g.s.になる。例えば４：５：６（長三和音の比率）は互いに素であるから、４と５と６の最小公倍数を定め（60）その g.s.を計算する（９）。